

1. Pour les quatre coins du carré on a

$$\begin{array}{ll} p_A V_A = nRT & p_B V_B = nRT \\ p_A V_B = nRT_1 & p_B V_A = nRT_2 \end{array} \quad \text{et donc} \quad T_1 = \frac{V_B}{V_A} T \text{ et } T_2 = \frac{V_A}{V_B} T$$

— La chaleur échangée en suivant le chemin 1 est donnée par :

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_p(T_1 - T) + C_v(T - T_1) = (C_p - C_v)T_1 - (C_p - C_v)T = nR(T_1 - T) \\ &= nRT\left(\frac{V_B - V_A}{V_A}\right) \end{aligned}$$

Le travail échangé en suivant le chemin 1 est :

$$W_1 = -p_A(V_B - V_A) = -p_A V_A \left(\frac{V_B - V_A}{V_A}\right)$$

Alors

$$W_1 + Q_1 = nRT\left(\frac{V_B - V_A}{V_A}\right) - p_A V_A \left(\frac{V_B - V_A}{V_A}\right) = 0$$

— Pour le chemin 2 on a :

$$\begin{aligned} Q_2 &= C_v(T_2 - T) + C_p(T - T_2) = -(C_p - C_v)T_2 + (C_p - C_v)T = nR(T - T_2) \\ &= nRT\left(\frac{V_B - V_A}{V_B}\right) \end{aligned}$$

et

$$W_2 = -p_B(V_B - V_A) = -p_B V_B \left(\frac{V_B - V_A}{V_B}\right)$$

Alors

$$W_2 + Q_2 = nRT\left(\frac{V_B - V_A}{V_B}\right) - p_B V_B \left(\frac{V_B - V_A}{V_B}\right) = 0 = W_1 + Q_1$$

2. Cette fois pour les quatre coins du carré on a :

$$\begin{array}{ll} p_A V_A = nRT_A & p_B V_B = nRT_B \\ p_A V_B = nRT_1 & p_B V_A = nRT_2 \end{array} \quad \text{et donc} \quad T_1 = \frac{V_B}{V_A} T \text{ et } T_2 = \frac{V_A}{V_B} T$$

— Pour le chemin 1 :

La chaleur échangée est :

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_p(T_1 - T_A) + C_v(T_B - T_1) = (C_p - C_v)T_1 + C_v T_B C_p T_A = nRT_1 + C_v T_B - \\ &\quad C_p T_A \\ &= p_A V_B + C_v T_B - C_p T_A \end{aligned}$$

Et le travail

$$W_1 = -p_A(V_B - V_A)$$

Donc

$$\begin{aligned} Q_1 + W_1 &= p_A V_B + C_v T_B - C_p T_A - p_A(V_B - V_A) = p_A V_A + C_v T_B - C_p T_A \\ &= nRT_A + C_v T_B - C_p T_A = (C_p - C_v)T_A + C_v T_B - C_p T_A \\ &= C_v(T_B - T_A) \end{aligned}$$

— Pour le chemin 2 :

La chaleur échangée est :

$$Q_2 = C_v(T_2 - T_A) + C_p(T_B - T_2) = C_pT_B - C_vT_A - (C_p - C_v)T_2$$
$$nrT_2 = C_pT_B - C_vT_A - p_BV_A$$

Et le travail

$$W_2 = -p_B(V_B - V_A)$$

Donc

$$Q_2 + W_2 = C_pT_B - C_vT_A - p_BV_A - p_B(V_B - V_A) = C_pT_B - C_vT_A - p_BV_B$$
$$= C_pT_B - C_vT_A - nRT_B = nC_pT_B - C_vT_A - (C_p - C_v)T_B$$
$$= C_v(T_B - T_A) = Q_1 + W_1$$

3. La quantité $= C_v(T_B - T_A)$ représente la différence d'*énergie interne*.
Pour un gaz parfait

$$dU = C_vdT \quad \text{et} \quad C_v(T_B - T_A) = \Delta U = U(T_B) - U(T_A)$$